Notations

Dans tout le problème on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels avec m lignes et n colonnes. Lorsque $m = n$, on écrira plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{C}^k(I, F)$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel vectoriel normé F de dimension finie.

Pour $f \in \mathscr{C}^0([a, b], F)$, on notera $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Notations et rappels sur les équations différentielles

Les équations différentielles étudiées par la suite sont définies pour des fonctions d'une variable x à valeurs dans l'intervalle $I = [0, 1]$. Dans ce cadre, nous adoptons les définitions suivantes.

- *Une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ est du type*

  $$y' + uy = v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})^2.$$

  La fonction v est le second membre de l'équation. Si $v = 0$, on dit que l'équation est homogène.

- *Une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ est du type*

  $$y'' + uy' + vy = w \quad \text{avec } (u, v, w) \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})^3.$$

  La fonction w est le second membre de l'équation. Si $w = 0$, on dit que l'équation est homogène.

- *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une équation différentielle linéaire matricielle du premier ordre d'inconnue $Y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ est du type*

  $$Y' + UY = V \quad \text{avec } U \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ et } V \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

  La fonction V est le second membre de l'équation. Si $V = 0$, on dit que l'équation est homogène.

Soient $U \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $V \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Pour $x_0 \in [0, 1]$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle problème de Cauchy la recherche d'une fonction $Y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ vérifiant

$$\begin{cases} Y' + UY = V \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce cadre, on rappelle le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires matricielles (aussi appelées vectorielles) du premier ordre, qui pourra être utilisé tout au long du sujet :

Théorème de Cauchy

Soient $U \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $V \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, ainsi que $x_0 \in [0, 1]$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Il existe une unique solution $Y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ définie sur $[0, 1]$ du problème de Cauchy (1).

Tournez la page S.V.P.

Présentation du problème de Sturm-Liouville

Par la suite, et jusqu'à la fin du problème, a, b, c et d désignent quatre réels fixés tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ *et* $(c, d) \neq (0, 0)$.

- *On note* $\mathscr{E}$ *l'espace préhilbertien* $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$. *La norme associée est notée* $\| \|_2$.

- *On note* $\mathscr{E}_2$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathscr{E}$ *constitué des fonctions g de* $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *telles que*

$$ag(0) + bg'(0) = 0 \text{ et } cg(1) + dg'(1) = 0.$$

Pour $p \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, *on définit l'application linéaire*

$$H_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' + py. \end{array} \right.$$

Par extension, et bien que H_p *ne soit pas un endomorphisme (les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont distincts), on dit que le réel* λ *est une valeur propre de* H_p *s'il existe un élément y non nul de* $\mathscr{E}_2$ *vérifiant* $H_p(y) = \lambda y$. *Dans ce cas, y est un vecteur propre de* H_p *associé à* λ *et* $\{y \in \mathscr{E}_2 \ / \ H_p(y) = \lambda y\}$ *est le sous-espace propre de* H_p *associé à* λ.

Enfin, pour $f \in \mathscr{E}$, *on considère le problème de Sturm-Liouville, d'inconnue* $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{cases} -y'' + py = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_p(f)$$

Ainsi, $y \in \mathscr{C}^2(0,1],\mathbb{R})$ *est une solution du problème* $SL_p(f)$ *si et seulement* $y \in \mathscr{E}_2$ *et si* $H_p(y) = f$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence et/ou l'unicité de solutions du problème de Sturm-Liouville.

- *La partie **I** met en place des résultats classiques pour l'étude des équations différentielles linéaires.*

- *La partie **II** traite d'un exemple et pose le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution à un problème de Sturm-Liouville explicite.*

- *Une étude spectrale de l'application* H_p *est proposée à la partie **III** et, lorsque cet opérateur est bijectif, une étude spectrale de l'inverse est menée en partie **V**.*

- *La partie **IV** étudie le problème de Sturm-Liouville lorsque l'application* H_p *est injective.*

- *La question initiale est traitée dans la partie **VI**, en lien avec le spectre de l'application* H_p.

I. Exercices préliminaires

Il s'agit de résultats classiques utiles par la suite. Bien entendu, ces résultats sont à établir, même s'ils apparaissent explicitement au programme du concours.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « la fonction $x \longmapsto e^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation différentielle $y' = y + 4$. »

(b) Affirmation : « l'unique solution du système de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

est la fonction $x \longmapsto e^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$. »

(c) Affirmation : « l'équation différentielle $y' = y + 4$ possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. »

(d) Affirmation : « l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y + 4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »

2. (a) On étudie l'équation différentielle scalaire homogène du premier ordre $y' + py = 0$, avec $p \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

En considérant, pour $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

(b) On considère à présent une équation différentielle scalaire du premier ordre $y' + py = f$, avec $(p, f) \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})^2$.

En considérant, pour $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, établir que les solutions de l'équation sont les fonctions du type

$$y : x \longmapsto \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + \int_0^x f(u)e^{\int_x^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$$

où α est une constante réelle arbitraire.

Jusqu'à la fin de cette partie, pour p un élément de $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, q et f des éléments de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on considère les équations différentielles linéaires

$$y'' + py' + qy = f \qquad (E) \qquad\qquad y'' + py' + qy = 0 \qquad (EH)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad (S) \qquad\qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (SH).$$

On note $\mathscr{S}(E)$, $\mathscr{S}(EH)$, $\mathscr{S}(S)$ et $\mathscr{S}(SH)$ les ensembles des solutions de (E), (EH), (S) et (SH) respectivement.

3. (a) Vérifier que si y est solution de (E), alors $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

(b) Réciproquement, montrer que si $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est solution de (S), alors z_1 est solution de (E) et $z_2 = z_1'$.

Tournez la page S.V.P.

4. En déduire le résultat fondamental pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux suivant :

Pour $x_0 \in [0,1]$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$.

5. **(a)** Établir que l'ensemble $\mathscr{S}(EH)$ des solutions de (EH) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ de dimension 2.

   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $\mathscr{S}(EH)$.

   (c) Pour tout couple de solutions (y_1, y_2) de (EH), on définit le wronskien w de ce couple de solutions par

$$\forall x \in [0,1],\ w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i. (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{S}(EH)$.

   ii. Pour tout $x \in [0,1]$, $w(x)$ est non nul.

   iii. Il existe $x \in [0,1]$ tel que $w(x)$ est non nul.

   Indication : on pourra travailler sur le système (SH) *équivalent à* (EH).

Un tel couple (y_1, y_2) *de solutions de* (EH) *est appelé système fondamental de solutions de* (EH).

6. On considère à nouveau l'équation avec second membre (E).

Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^2([0,1],]0,+\infty[)$ telle que la proposition suivante est vraie :

la fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction z définie par $y = uz$ est solution d'une équation du type $-z'' + rz = g$.

Les fonctions r et g seront explicitées à partir de p, q et f.

7. Établir que le wronskien $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ d'un système fondamental de solutions (y_1, y_2) d'une équation du type $-y'' + py = 0$ est une fonction constante non nulle.

Ainsi, la résolution d'une équation telle que (E) *est équivalente à la résolution d'une équation du type* $-y'' + py = f$. *C'est cette équation réduite qui sera étudiée par la suite.*

II. Étude d'un exemple d'équation de Sturm-Liouville

Dans cette partie, exceptée la dernière question, on étudie le problème de Sturm-Liouville $SL_p(f)$ *dans le cas particulier* $p = 0$, $a = c = 1$ *et* $b = d = 0$ *:*

$$\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_0(f)$$

8. Déterminer la solution y_1 de l'équation différentielle $y'' = 0$ vérifiant $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$.

De même, déterminer la solution y_2 de $y'' = 0$ vérifiant $y_2(1) = 0$ et $y_2'(1) = -1$.

9. Vérifier que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $y'' = 0$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1],\ \ y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = 1$$

10. On pose

$$K_0(x,t) = \begin{cases} y_2(x)y_1(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ y_1(x)y_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour $f \in \mathscr{E}$, on définit $\Phi(f)$ sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1],\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^1 K_0(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Établir que $\Phi(f)$ est l'unique solution de $SL_0(f)$.

On cherche à présent à résoudre ce même problème $SL_0(f)$ par une approche spectrale.
Sous les hypothèses définies dans cette partie, on a

$$\mathscr{E}_2 = \{g \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid g(0) = g(1) = 0\},$$

et

$$H_0 : \begin{cases} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ g & \longmapsto & -g''. \end{cases}$$

Ainsi, $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ est une solution de $SL_0(f)$ si et seulement si y appartient à $\mathscr{E}_2$ et $H_0(y) = f$.

11. L'application H_0 est-elle injective ?

12. Établir qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante et de limite $+\infty$ tel que l'ensemble des valeurs propres de H_0 est $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
On explicitera la valeur de λ_n ainsi qu'un vecteur propre associé φ_n vérifiant $\|\varphi_n\|_2 = 1$ et $\varphi_n'(0) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que l'unique solution y du problème $SL_0(f)$ est

$$y : x \longmapsto \alpha x - \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u,$$

où α est une constante réelle que l'on déterminera en fonctions d'intégrales dépendant de f.

14. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

- **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}(\varphi_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n)$. Déterminer f_n en fonction des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
- **(b)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir que le problème $SL_0(f_n)$ admet une unique solution que l'on écrira à nouveau en fonction de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On notera y_n cette solution.
- **(c)** Vérifier que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $y \in \mathscr{E}$.
- **(d)** Établir que y est la solution de $SL_0(f)$.

15. Dans cette question seulement, on pose $p_0 : x \longmapsto -\pi^2$, $a = c = 1$ et $b = d = 0$ et on s'intéresse au problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ suivant :

$$\begin{cases} -y'' - \pi^2 y = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

On considère l'application linéaire

$$H_{p_0} : \begin{cases} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' - \pi^2 y. \end{cases}$$

(a) L'application H_{p_0} est-elle injective ?

(b) Déterminer explicitement les solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène $y'' + \pi^2 y = 0$ vérifiant respectivement

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = \pi. \end{cases}$$

Vérifier qu'il s'agit d'un système fondamental de l'équation homogène.

(c) Pour $f \in \mathscr{E}$, on veut résoudre l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = -f$ par la méthode dite de variation des constantes.

Pour cela on s'appuie sur le système fondamental (y_1, y_2) obtenu à la question précédente. On cherche alors les solutions de $y'' + \pi^2 y = -f$ sous la forme

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \text{ avec } (u_1, u_2) \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})^2 \text{ vérifiant } u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0.$$

Déterminer une solution particulière de l'équation $y'' + \pi^2 y = -f$ à l'aide d'une ou plusieurs intégrales dépendant de f, puis exprimer la solution générale de cette même équation.

(d) Lorsque $f : x \longmapsto \cos(\pi x)$, établir que le problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ admet plusieurs solutions que l'on précisera.

(e) Lorsque $f : x \longmapsto \sin(\pi x)$, établir que le problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ n'admet aucune solution.

III. Une étude spectrale de l'application H_p

On considère à présent le cas général où p est une fonction appartenant à $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$.

16. *Un calcul préliminaire*. Soit $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$.

(a) Établir l'inégalité

$$2 \int_0^1 |y(t) y'(t)| \mathrm{d}t \leqslant \alpha \int_0^1 y(t)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y'(t)^2 \mathrm{d}t.$$

Indication : On pourra remarquer que pour $\delta > 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\left(\delta |y(x)| - \frac{1}{\delta} |y'(x)| \right)^2 \geqslant 0.$$

(b) Vérifier l'égalité $y^2(0) + y^2(1) = -\displaystyle\int_0^1 z'(x) \mathrm{d}x$, où $z : x \longmapsto y^2(x) \cos(\pi x)$ et en déduire que pour tous réels u et v il existe une constante $C(u,v)$ telle que

$$u y^2(0) + v y^2(1) \leqslant C(u,v) \int_0^1 y(t)^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 y'(t)^2 \mathrm{d}t.$$

17. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et y dans $\mathscr{E}_2$ vérifiant $-y'' + py = \lambda y$.

(a) Établir l'égalité

$$y'(1)y(1) - y'(0)y(0) = \int_0^1 y'(t)^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 (p(t) - \lambda)y(t)^2 \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire l'existence d'une constante λ_0 dépendant de a, b, c, d, et de la fonction p, telle que, pour $\lambda < \lambda_0$, en posant $q : x \longmapsto p(x) - \lambda$, le problème $SL_q(0)$ n'a que l'application $y = 0$ comme solution. *Indication : on pourra traiter à part le cas $bd = 0$.*

On rappelle que H_p est l'application linéaire définie par

$$H_p : \begin{cases} \mathscr{E}^2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' + py. \end{cases}$$

18. Montrer que H_p vérifie la relation de symétrie

$$\forall (y, z) \in \mathscr{E}_2^2, \ \ \langle H_p(y), z\rangle = \langle y, H_p(z)\rangle.$$

19. Établir que deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes de H_p sont orthogonaux.

20. Démontrer que tout sous-espace propre de H_p est de dimension 1.

IV. Fonction de Green

Dans toute cette partie, on considère une fonction $q \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que le problème $SL_q(0)$ n'a que la fonction $y = 0$ comme solution.

On rappelle que a, b c et d sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$.

21. Vérifier que l'application $H_q : \mathscr{E}_2 \longrightarrow \mathscr{E}$ est injective.

22. (a) Établir l'existence de deux éléments non nuls y_1 et y_2 de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} -y_1'' + qy_1 = 0 \\ ay_1(0) + by_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -y_2'' + qy_2 = 0 \\ cy_2(1) + dy_2'(1) = 0. \end{cases}$$

Indication : On pourra chercher à résoudre deux problèmes de Cauchy bien choisis.

(b) Montrer qu'un tel couple (y_1, y_2) est un système fondamental de solution de $-y'' + qy = 0$ et qu'il est possible de choisir ce couple de sorte que

$$\forall x \in [0,1], \ w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = -1.$$

Jusqu'à la fin de cette partie, le couple (y_1, y_2) fait référence à un système fondamental de solutions de l'équation $-y'' + qy = 0$ tel que définis à la question 22.(b).

23. Soit f un élément de $\mathscr{E}$.

(a) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle $-y'' + qy = f$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \longmapsto \left(\alpha + \int_x^1 f(t)y_2(t)\mathrm{d}t\right)y_1(x) + \left(\beta + \int_0^x f(t)y_1(t)\mathrm{d}t\right)y_2(x).$$

où (α, β) sont deux constantes réelles arbitraires. Déterminer une forme analogue pour la dérivée y' de la solution précédente y.

(b) En déduire que $SL_q(f)$ admet une unique solution y qui s'écrit sous la forme

$$y : x \longmapsto \int_0^1 K_q(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

où l'on a posé

$$K_q(x,t) = \begin{cases} y_1(t)y_2(x) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ y_1(x)y_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x < t \leqslant 1. \end{cases}$$

On dit que K_q est *la fonction de Green* associée au problème $SL_q(f)$.

(c) Établir que $K_q : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[0,1]^2$.

V. Analyse spectrale de l'application $\Phi_q = H_q^{-1}$

Dans toute cette partie, on considère une fonction $q \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que le problème $SL_q(0)$ n'a que la fonction $y = 0$ comme solution.

Pour rappel, l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

D'après la partie précédente, pour $f \in \mathscr{E}$, le problème $SL_q(f)$ admet une unique solution, à savoir $\Phi_q(f)$ définie de la façon suivante :

$$\Phi_q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E}_2 \\ f & \longmapsto & \left(x \longmapsto \int_0^1 K_q(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right) \end{array} \right. .$$

Dans la mesure où $\mathscr{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$, on pourra considérer que Φ_q est un endomorphisme de $\mathscr{E}$ et introduire ses valeurs propres et ses espaces propres, par exemple, comme cela a été fait pour H_q précédemment.

24. Vérifier que H_q et Φ_q sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

25. Établir que pour tout $(f,g) \in \mathscr{E}^2$, on a

$$\langle \Phi_q(f), g\rangle = \langle f, \Phi_q(g)\rangle.$$

26. Montrer que Φ_q est une application continue de $(\mathscr{E}, \|\ \|_2)$ vers $(\mathscr{E}_2, \|\ \|_2)$.

27. **(a)** Vérifier que pour toute valeur propre λ de Φ_q, le sous-espace propre de Φ_q associé à λ est de dimension 1.

(b) Justifier que les sous-espaces propres de Φ_q correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VI. Solutions de l'équation de Sturm-Liouville $SL_p(f)$

On revient au problème de Sturm-Liouville dans le cas général, c'est-à-dire trouver les solutions du système d'équations d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ suivant :

$$\begin{cases} -y'' + py = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_p(f)$$

où p et f sont des éléments de $\mathscr{E}$.

28. Vérifier que le noyau et l'image de H_p sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathscr{E}$.

29. Établir l'existence d'un réel λ_0 tel que toute valeur propre λ de H_p vérifie $\lambda > \lambda_0$.

On fixe à présent une valeur $\lambda < \lambda_0$. Par suite, la fonction $q = p - \lambda$ est telle que les valeurs propres de H_q sont incluses dans $\mathbb{R}_+^*$.

30. Vérifier que μ est une valeur propre de Φ_q si et seulement si $\dfrac{1}{\mu} + \lambda$ est une valeur propre de H_p.

31. Dans cette question uniquement, on suppose que H_p est injective. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{E}$, $SL_p(f)$ admet une unique solution.

32. Dans cette question, on suppose que H_p n'est pas injective et on note $\varphi \in \mathscr{E}_2$ un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

(a) Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que si $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$, alors $SL_p(f)$ n'a pas de solution.

(b) Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que si $\langle f, \varphi \rangle = 0$, alors $SL_p(f)$ admet une infinité de solutions dont on précisera la structure.

——— FIN DU SUJET ———